无限循环小数是超越数和无理数

** *

2026 年 11 月 3 日

摘要

根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理，可以证明无限循环小数都是超越数，从而也是无理数。所以无限循环小数不是有理数。把循环小数当成有理数是一个逻辑错误。0.(9) 这个无限循环小数与 1 是两个不同的数，尽管二者的差距趋于 0。最后还证明了所有无限小数都是超越数。

关键词: 循环小数, 超越数, 无理数, 有理数
MSC2020: 11J81

1 定义:

- 有理数就是分数，其中分子分母的素数因子个数有限，每个因子的幂次也必须有限。
- 不是有理数的数就是无理数，例如 $\sqrt{2}$ 与 π。
- 超越数是不满足任何非零整系数多项式方程的数，即非代数数，例如 π。
- 所有有理数都是代数数，所以超越数都不是有理数。
- 所有超越数都是无理数。

三者关系如下图所示:



图 1: 数的关系

*No funding was received for this work. No part of this article was generated by AI.

2 相等与约等

看如下两个数：

$$\alpha = 0.\dot{9} = 0.9999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \approx 1,$$
$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \approx 1.$$

α 与 β 相等么？是同一个数么？逻辑表明，α 与 β 约等而不相等，α 与 β 是两个不同的数，而且都是超越数和无理数，不是有理数。证明如下（N 为最大自然数）：

用公分母 10^N 对 α 通分求和可得：

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{10^n} = 9\,\frac{10^{N-1} + 10^{N-2} + \cdots + 100 + 10 + 1}{10^N}.$$

分子是奇数，个位数为 1，没有因子 2 和 5。分母只有因子 2 和 5，所以分母中的 2^N 消不掉。根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理 [1]，当不可约分数分子或分母的某个因子的幂次趋于无穷时，这个分数就是超越数。这里 N 趋于无穷，所以 α 是超越数和无理数，不是有理数。故而 α 与 1 是两个不同的数，只是他们的距离趋于 0。

同样的方法用于 β，用公分母 2^N 通分求和可得：

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^N} \\
&= \frac{2^{N-1} + 2^{N-2} + \cdots + 4 + 2 + 1}{2^N}.
\end{aligned}$$

β 的分子是奇数，分母中的 2^N 消不掉。根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理 [1]，β 是超越数和无理数，不是有理数。两个不可约分数，只要分子或分母中有一个因子不同，二者就不会相等。α 的分母中有因子 5，β 没有因子 5，所以 α 与 β 是两个不同的数，两个不同的超越数，也是两个不同的无理数，都不是有理数，尽管他们的值都趋于 1。

3 逻辑错误

为什么会把循环小数，比如 $0.\dot{9}$，当成有理数？因为在算术计算中，把约等当成了相等，可以忽略无穷小量。但在研究有理数无理数超越数等问题时，是不能忽略无穷小量的。

看 $0.\dot{3}\dot{5}$ 与 35/99 这两个数，$0.\dot{3}\dot{5}$ 实际是一个无穷等比数列求和，首项为 0.35，公比为 1/100，可得：

$$0.\dot{3}\dot{5} = 0.35\,\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^N}{1-\frac{1}{100}}.$$

因为 N 无穷大，$\left(\frac{1}{100}\right)^N \to 0$。忽略掉 $\left(\frac{1}{100}\right)^N$ 后，可得：

$$0.35\,\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^N}{1-\frac{1}{100}} = 0.35\,\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{35}{99}.$$

$0.\dot{3}\dot{5}$ 与 $\frac{35}{99}$ 这两个数是约等，而不是相等。在判断是不是有理数的时候，直接用了这个约等的结果，把约等当成相等处理，从而得到循环小数是有理数的谬论。不论什么理论框架，循环小数都是超越数，是无理数，不是有理数，这个是逻辑决定的，不是理论流派可以选择的。

4 $\infty \neq \infty - 1$

有一个误解，常被用来证明 0.(9) 是代数数，认为 0.(9) 满足方程：

$$10x - x = 9.$$

理由是：$10 \times 0.999\cdots = 9.999\cdots$，所以 $10x - x = 9$。

0.(9) 的小数位数有 ∞ 位。这里逻辑错误就在于认为 $10x$ 的小数部分等于 x 的小数部分，也就是认为 $\infty = \infty - 1$。10 乘 x 后的小数位数要比 x 的小数位数少 1，二者是不等的。0.(9) 满足方程：

$$10x - x = 9 - 9 \times 10^{-\infty} \neq 9.$$

如果认为 $\infty = \infty - 1$，就会导致以下错误：

令

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{\infty}.$$

可得：

$$\begin{aligned} & S = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{\infty}) \\ \Rightarrow\quad & S = 1 + 2\big(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{\infty-1}\big) \\ \Rightarrow\quad & S = 1 + 2S \\ \Rightarrow\quad & S = -1. \end{aligned}$$

故而只有认为 $\infty \neq \infty - 1$，才不会出现这样的荒谬结果。

5 无限小数都是超越数

对于任何小于 1 的无限小数 $\theta = 0.C_1C_2C_3\cdots C_k$，其中 $k \to \infty$，$C_k \neq 0$，C_i 是小数点后第 i 位的数字，$C_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，都可以写成分数如下：

$$\theta = \frac{C_1C_2C_3\cdots C_k}{10^k} = \frac{C_1C_2C_3\cdots C_k}{2^k \cdot 5^k}, \qquad C_k \neq 0.$$

由于 $C_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，故 θ 的分子中不会同时含有因子 2 和 5，所以分母中的 2^k 和 5^k 至少有一个不受约分的影响。根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理 [1]，可知 θ 必是超越数。

也就是说，所有无限小数，不管循环还是不循环，都是超越数。

如果自然数有 N 个，无限小数的位数也有 N 位，那么 $(0,1)$ 区间内的小数只有 10^N 个。而 Qi Jin 证明了 $(0,1)$ 之间的实数有

$$N^{N^{N^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{N}}}}}}$$

个，这里有无穷多个 N[2]。故而很多实数不能用小数精确表示，只能近似逼近。

代数无理数，例如 $\sqrt{2}$，都不能用小数精确表示，只能用无限小数近似逼近。

参考文献

[1] Jin, Q. (2026). *Proof of Transcendence of the Euler–Mascheroni Constant* γ, preprint. Zenodo: `https://doi.org/10.5281/zenodo.23282062`.

[2] Jin, Q. (2026). *Proof of the Continuum Hypothesis*, preprint. Zenodo: `https://doi.org/10.5281/zenodo.20651018`.