

无限循环小数是超越数和无理数

** *

2026 年 10 月 28 日

摘要

根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理，可以证明无限循环小数都是超越数，从而也是无理数。所以无限循环小数不是有理数。把循环小数当成有理数是一个逻辑错误。0.(9) 这个无限循环小数与 1 是两个不同的数，尽管二者的差距趋于 0。

关键词：循环小数，超越数，无理数，有理数

MSC2020: 11J85

1 定义：

- 有理数就是分数，其中分子分母的素数因子个数有限，每个因子的幂次也必须有限。
- 不是有理数的数就是无理数，例如 $\sqrt{2}$ 与 π 。
- 超越数是不满足任何非零整系数多项式方程的数，即非代数数，例如 π 。
- 所有有理数都是代数数，所以超越数都不是有理数。
- 所有超越数都是无理数。

三者关系如下图所示：



图 1: 数的关系

*No funding was received for this work. No part of this article was generated by AI.

2 相等与约等

看如下两个数：

$$\alpha = 0.\dot{9} = 0.9999 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \approx 1,$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \approx 1.$$

α 与 β 相等么？是同一个数么？逻辑表明， α 与 β 约等而不相等， α 与 β 是两个不同的数，而且都是超越数和无理数，不是有理数。证明如下（ N 为最大自然数）：

用公分母 10^N 对 α 通分求和可得：

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^N \frac{1}{10^n} = 9 \frac{10^{N-1} + 10^{N-2} + \dots + 100 + 10 + 1}{10^N}.$$

分子是奇数，个位数为 1，没有因子 2 和 5。分母只有因子 2 和 5，所以分母中的 2^N 消不掉。根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理 [1]，当不可约分数分子或分母的某个因子的幂次趋于无穷时，这个分数就是超越数。这里 N 趋于无穷，所以 α 是超越数和无理数，不是有理数。故而 α 与 1 是两个不同的数，只是他们的距离趋于 0。

同样的方法用于 β ，用公分母 2^N 通分求和可得：

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^N} \\ &= \frac{2^{N-1} + 2^{N-2} + \dots + 4 + 2 + 1}{2^N}. \end{aligned}$$

β 的分子是奇数，分母中的 2^N 消不掉。根据 Qi Jin 证明的超越数判定定理 [1]， β 是超越数和无理数，不是有理数。两个不可约分数，只要分子或分母中有一个因子不同，二者就不会相等。 α 的分母中有因子 5， β 没有因子 5，所以 α 与 β 是两个不同的数，两个不同的超越数，也是两个不同的无理数，都不是有理数，尽管他们的值都趋于 1。

3 逻辑错误

为什么会把循环小数，比如 $0.\dot{9}$ ，当成有理数？因为在算术计算中，把约等当成了相等，可以忽略无穷小量。但在研究有理数无理数超越数等问题时，是不能忽略无穷小量的。

看 $0.\dot{3}\dot{5}$ 与 $35/99$ 这两个数, $0.\dot{3}\dot{5}$ 实际是一个无穷等比数列求和, 首项为 0.35 , 公比为 $1/100$, 可得:

$$0.\dot{3}\dot{5} = 0.35 \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^N}{1 - \frac{1}{100}}.$$

因为 N 无穷大, $\left(\frac{1}{100}\right)^N \rightarrow 0$ 。忽略掉 $\left(\frac{1}{100}\right)^N$ 后, 可得:

$$0.35 \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^N}{1 - \frac{1}{100}} = 0.35 \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{35}{99}.$$

$0.\dot{3}\dot{5}$ 与 $\frac{35}{99}$ 这两个数是约等, 而不是相等。在判断是不是有理数的时候, 直接用了这个约等的结果, 把约等当成相等处理, 从而得到循环小数是有理数的谬论。不论什么理论框架, 循环小数都是超越数, 是无理数, 不是有理数, 这个是逻辑决定的, 不是理论流派可以选择的。

参考文献

- [1] Jin, Q. (2026). *Proof of Transcendence of the Euler–Mascheroni Constant γ* , preprint. Zenodo: <https://doi.org/10.5281/zenodo.23282062>.